Compte-rendu des oraux d'agrég de math (option D)

Nguyễn Lê Thành Dũng

29 juin – 1er juillet 2017

Leçon d'informatique fondamentale (29/06)

Couplage Leçon choisie : **915 – Classes de complexité. Exemples.**
Alternative : *913 – Machines de Turing. Applications.*

Horreur et damnation, un couplage qui ne laisse aucune possibilité d'échapper aux machines de Turing ! J'ai choisi le moindre mal, en m'appuyant sur le livre de Perifel pour construire un plan tout à fait banal :

1. Modèle des machines de Turing et premiers résultats (accélération, hiérarchie)
2. Classes de complexité en temps (P, NP, EXP)
3. Classes de complexité en espace (L, NL, PSPACE)

Malheureusement la rédaction du plan m'a pris trop de temps ce qui ne m'a pas permis de bien préparer mes développements.

Développements proposés Choix du jury : **Le problème d'universalité des automates finis non-déterministes est PSPACE-difficile**.
Alternative : *Théorème de Savitch* (sans hypothèse de constructibilité en espace).

Pour résumer : on a un langage PSPACE, une machine de Turing $\mathscr{M}$ à un ruban fonctionnant en espace $\leq p(n)$ ($p \in \mathbb{N}[X]$) qui le reconnaît, et on veut construire à partir d'un mot $x \in \Sigma$ un automate $\mathscr{A}_x$ sur un alphabet Σ' tel que $L(\mathscr{A}_x) = \Sigma'^*$ ssi $\mathscr{M}$ *rejette* x (sachant que PSPACE est stable par complémentaire). Soit $n = |x|$. On définit d'abord une représentation des configurations de $\mathscr{M}$ comme des mots de $p(n) + 1$ lettres ($p(n)$ cases mémoire + un symbole état interne à la position de la tête de lecture), puis on cherche à construire $\mathscr{A}_x$ de sorte que $\Sigma'^* \setminus L(\mathscr{A}_x)$ représente l'ensemble des chemins acceptants dans $\mathscr{M}$ sur l'entrée x.

Donc il faut que $\mathscr{A}_x$ détecte (1) les mots mal formés (ne correspondant pas à des suites de configurations), (2) les suites avec deux configurations consécutives qui ne peuvent pas se succéder dans un calcul légal, (3) celles qui n'aboutissent pas sur un état acceptant. Il s'agissait de convaincre l'auditoire que c'était faisable avec $|\mathscr{A}_x| = O(p(n))$.

En raison à la fois d'un manque de travail en amont sur ce développement et d'un manque de temps durant la préparation, la présentation de cet automate a été brouillonne et peu formelle / rigoureuse. Bref, j'ai fait exactement ce que JGL nous a déconseillé de faire pendant toute l'année… S'ensuivirent 20 minutes de questions sur le développement pour préciser des points, culminant en la description formelle d'un automate détectant si les cases du ruban loin de la tête de lecture ont été mal recopiés d'une configuration à la suivante.

Questions Après tout cela, il restait moins d'une dizaine de minutes pour un petit exercice. Il s'agissait de réduire le problème de k-coloriabilité d'un graphe à la $(k+1)$-coloriabilité. C'est facile, j'ai à peu près expédié le truc (en essayant d'être assez formel cette fois-ci), sauf que j'ai écrit $\mathrm{Col}(k+1) \leq_p \mathrm{Col}(k)$ au lieu du contraire. C'est avec ce genre d'inattention qu'on se retrouve avec des remarques dans le rapport du jury comme quoi même les bons candidats ne maîtrisent pas le sens des réductions…

Note 12/20.

Bonus : leçon d'info d'un camarade lyonnais (01/07)

Je suis allé assister à ça l'après-midi après avoir fini mes oraux. La leçon était **927 – Exemples de preuve d'algorithme : correction, terminaison.** Le développement présenté était la preuve de correction de Floyd–Warshall avec l'optimisation en espace (réutilisation du même tableau à chaque itération de la boucle for extérieure).

Il n'y a pas eu énormément de questions sur le développement, mais les exercices n'étaient pas des plus passionnants. Des preuves de terminaison et correction (détaillées, mais pas formalisées en logique de Hoare) ont été demandées pour le tri fusion récursif et pour la recherche dichotomique itérative, ce qui impliquait beaucoup de manipulations de parties entières.

Modélisation et analyse de systèmes informatiques (30/06)

Le texte que j'ai présenté portait sur *l'arbre de Stern–Brocot*, un arbre binaire infini où chaque rationnel strictement positif apparaît exactement une fois, et sur des calculs opérant sur la représentations des rationnels comme chemins dans cet arbre. L'autre texte du couplage parlait de codes correcteurs d'erreurs. En fait, j'ai choisi parmi les deux celui qui parlait d'un sujet que je connaissais déjà, puisque j'avais conçu un sujet du concours Prologin portant là-dessus. Pour en savoir plus sur ce magnifique objet mathématique, voir l'article *Functional pearl – Enumerating the rationals* puis parcourir le graphe des références bibliographiques. On pourrait dire que j'ai de la chance, mais en même temps pendant l'année il est souvent arrivé que je tombe sur des textes de modélisation qui parlent de choses que je connaissais…

Le sujet En gros, on définit un système de réécriture sur $\mathbb{Q}_+^*$:

$$\frac{m}{n} \xrightarrow{G} \frac{m}{n-m} \quad \text{si } m < n \qquad \frac{m}{n} \xrightarrow{D} \frac{m-n}{n} \quad \text{si } m > n$$

Ensuite, on interprète les mots de $\{G, D\}^*$ comme les adresses des nœuds d'un arbre binaire complet infini (chemins à partir de la racine avec G = gauche, D = droite), et on étiquette le nœud d'adresse w avec l'unique $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $r \xrightarrow{w}{}^* 1$.

Le texte donnait une méthode un peu compliquée pour calculer r à partir de w, tout en suggérant qu'il en existait une plus simple. Il proposait ensuite un ordre sur $\{G, D\}^*$ dont il affirmait que ça correspondait à l'ordre total sur les rationnels ; en déchiffrant, cela revenait en fait à dire que l'arbre de Stern–Brocot est un *arbre binaire de recherche*. Une seconde partie proposait ensuite de calculer des homographies sur les rationnels à partir des mots de $\{G, D\}^*$ correspondants, de façon *paresseuse* : après avoir regardé seulement un préfixe de l'entrée, on est déjà capable d'afficher un préfixe de la sortie.

Exposé Mon plan était :

1. Définitions, énumération des rationnels (avec exercice de programmation)
2. Propriétés d'ordre (i.e. preuve que c'est un ABR)
3. Représentation des irrationnels
4. Calculs sur des flux dans $\mathbb{Q}_+^*$ et dans $\overline{\mathbb{R}_+}$

Dans le temps imparti, j'ai pu traiter (1) et (2) proprement au tableau, raconter (3) à l'oral vers la fin, et je n'ai pas du tout abordé (4). Je n'ai pas fait de vraie conclusion à mon exposé ; c'était peut-être une faute, d'un autre côté il n'y avait pas vraiment de situation de départ modélisée à laquelle revenir…

Pour l'exercice de programmation, il était demandé d'écrire une fonction qui calcule les nœuds du n-ième étage de l'arbre dans l'ordre. J'ai proposé deux méthodes pour le faire :

- Méthode simple : pour obtenir le i-ième rationnel ($0 \leq i \leq 2^n - 1$), on interprète i comme un mot binaire (avec $G \leftrightarrow 0$ et $D \leftrightarrow 1$), puis on inverse le système de réécriture en partant de 1.
- Méthode compliquée : on calcule d'abord le n-ième étage de *l'arbre de Calkin–Wilf*, pour lequel il existe une formule magique calculant le successeur d'un rationnel pour l'ordre du parcours en largeur. (Grâce au temps de préparation abondant, j'ai pu retrouver cette formule dont je connaissais préalablement l'existence.) Le n-ième étage de l'arbre de Stern–Brocot s'en déduit par *permutation à inversion de bits* (une opération qui intervient aussi dans la transformée de Fourier rapide).

Pour la partie (3), je suis parti de l'exemple, fourni par le texte, du nombre d'or approché par F_{n+1}/F_n avec (F_n) la suite de Fibonacci, pour proposer de représenter les irrationnels par des chemins *infinis* dans l'arbre. J'ai conclu l'exposé en disant que l'application $\{G, D\}^\omega \to \overline{\mathbb{R}_+}$ n'est malheureusement pas bijective puisque chaque rationnel a deux antécédents, mais qu'on pouvait s'y attendre puisque l'espace de Cantor n'est pas homéomorphe à la droite réelle achevée. Le jury n'a pas voulu saisir la perche topologique qui lui était tendue.

Questions *Complexité des algorithmes pour l'exercice de programmation ?* J'avais oublié de la mentionner… c'est en temps $O(n2^n)$ pour les deux. Ils m'ont demandé ensuite si c'était possible de faire mieux. On a une minoration $\Omega(2^n)$; j'ai dit que pour atteindre la borne, on pourrait faire le parcours de l'arbre tronqué à la hauteur n dans l'ordre infixe, à condition de savoir passer d'un nœud à son fils gauche/droit en $O(1)$, ce que je ne savais pas faire. Puis on est passés à autre chose.

J'avais parlé de *récursivité terminale* en présentant mon code ; ils m'ont demandé l'intérêt, puis m'ont posé quelques questions élémentaires sur cette notion.

Comme je n'avais pas réfléchi à la méthode tordue du texte pour trouver un rationnel à partir d'un mot, ils m'ont demandé une *interprétation matricielle* des règles de réécriture, puis de rendre compte à la fois de ma méthode et de celle du texte à partir de cette interprétation. Si j'ai rapidement compris que la mienne était équivalente à multiplier successivement un vecteur par des matrices, il a fallu qu'un membre du jury évoque l'associativité du produit pour que je comprenne que celle du texte revenait à calculer d'abord le produit matriciel en associant à gauche, puis de multiplier le vecteur par la matrice obtenue.

On m'a demandé d'expliquer ce dont j'allais parler dans ma partie (4), en particulier ce que je voulais dire par « flux ». J'ai dit que le fait d'utiliser une stratégie paresseuse permettait d'opérer sur des suites infinies et qu'on pouvait ainsi espérer calculer l'image d'un irrationnel par une homographie.

Dernière question : *connaissez-vous des langages de programmation paresseux ?* « Oui, j'ai pratiqué la programmation en Haskell, d'ailleurs, on a des suites infinies… mais tous les types sont coinductifs, donc on ne peut pas définir le type des suites forcément finies ! » L'examinateur qui avait posé la question avait l'air ravi d'entendre cela. Plus tard, cependant, je me suis aperçu que c'était faux puisqu'on peut annoter des champs comme stricts dans les déclarations de types !

Note 17/20.

Leçon de mathématiques pour l'informatique (29/06)

Couplage Leçon choisie : **123 – Corps finis. Applications.**

Alternative : *223 – Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.*

Étant passé sur la leçon *Nombres premiers* pendant l'année, j'étais ravi de pouvoir profiter de ma préparation spécifique ainsi que des remarques de Claudine Picaronny. Mon plan était :

1. Rappels de théorie des corps (caractéristique, extensions finies)
2. Cartographie des corps finis (existence et unicité, inclusions, clôture algébrique)
3. Groupe multiplicatif $\mathbb{F}_q^*$, carrés (cyclicité avec applications au petit théorème de Fermat et au théorème de Wilson, puis les histoires de symbole de Legendre etc.)
4. Algèbre linéaire et bilinéaire sur $\mathbb{F}_q$ (groupes GL_n / SL_n, formes quadratiques)
5. Polynômes irréductibles (Eisenstein, Berlekamp)

Mes références étaient Perrin, Demazure (pour l'algorithme de Berlekamp) et Caldero–Germoni, aussi connu sous le nom de H2G2 (pour les formes quadratiques et les développements).

Pendant la défense du plan j'ai dessiné au tableau le trellis de tous les corps finis d'une caractéristique p fixée.

Développements proposés Deux jolis développements tirés de H2G2 tome premier.

Choix du jury : **Loi de réciprocité quadratique** (en comptant les points de coniques sur $\mathbb{F}_q^p$).

Alternative : *Non-isomorphisme exceptionnel des groupes simples* $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$ *et* $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2)$.

Je n'ai pas fait tenir le développement dans les 15 minutes : il m'a fallu sauter une partie calculatoire pour arriver à la conclusion. À part ça, ça s'est pas trop mal passé.

J'avais écrit $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{F}_q^p)$ au tableau, un examinateur m'a demandé « N'y a-t-il pas une notation plus canonique, que vous utilisez dans votre plan ? ». J'ai expliqué que je notais $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_q^p)$ pour un groupe d'applications linéaires et $\mathrm{GL}_p(\mathbb{F}_q)$ pour un groupe de matrices. Réaction : « Ah, bon, d'accord. ».

Ils m'ont ensuite demandé de compléter le développement, j'ai commencé à faire le calcul en montrant où le $(-1)^{(p-1)(q-1)/4}$ allait apparaître, ils ont proposé de passer à autre chose.

Comme je parlais d'hyperplans affines dans le développement, ils m'ont demandé le nombre d'hyperplans affines dans $\mathbb{F}_q^n$.

Sur l'autre développement, ils ont juste demandé : « Vous affirmez que ces deux groupes sont de même cardinal, quel est ce cardinal ? — 20160, si je ne m'abuse. — Ah, vingt mille, quand même ! ». J'ai rajouté que c'était le plus petit cardinal où l'on trouve deux groupes simples non isomorphes.

Questions Elles étaient nombreuses ; souvent, une fois que le jury était convaincu que ça allait aboutir, on passait tout de suite à un autre exercice. Les voici, pas forcément dans l'ordre :

— *Que pouvez-vous dire de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ *?* C'est la même chose que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_2)$, dont j'avais mis dans mon plan qu'il est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$. *Démonstration ?* J'ai décrit l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sur $\mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\}$, puis ils ont voulu que je prouve proprement la bijectivité du morphisme dans $\mathfrak{S}_3$ correspondant. *À quel sous-groupe correspond* $\mathfrak{A}_3$ *?* J'ai explicité les matrices correspondantes.

— *Démonstration de la cyclicité de* $\mathbb{F}_q^*$ *?* J'ai honteusement hésité sur ce grand classique, mais j'ai quand même fini par retrouver la preuve sans indication, ils étaient plutôt convaincus sans que je détaille tout.

— *Si un groupe fini est d'exposant 2, que peut-on dire ?* Réponse : on peut montrer que c'est abélien, c'est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel, donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Vu que je connaissais déjà le truc ils ne m'ont pas demandé la démonstration.

— *L'application* $\mathbb{F}_p$*-linéaire* $u : x \in \mathbb{F}_{p^2} \mapsto x^p$ *est-elle diagonalisable ?* Il m'a demandé d'abord pourquoi c'était linéaire (réponse : c'est un automorphisme de corps qui fixe $\mathbb{F}_p$) et en particulier pourquoi ça préserve les sommes (« Quelle propriété des coefficients binomiaux utilisez-vous ? — $p \mid C_p^k$ »). Ensuite j'ai tout de suite remarqué que le polynôme minimal de u était $X^2 - 1$ et le tour était joué. (À un moment, j'ai dit que $X^2 - 1 = (X-1)^2$ en pensant à mon développement sur $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2)$ et en oubliant de préciser « en caractéristique 2 »…)

— *Quelle est la classe d'équivalence de* $q(x) = x^2 + xy + y^2 + z^2$ *sur* $\mathbb{F}_5$ *?* Il suffit de calculer le discriminant et de tester si c'est un carré.

— *Comment déterminer les polynômes irréductibles de degré 2 sur* $\mathbb{F}_2$ *?* En éliminant les produits de polynômes de degré 1. Après avoir constaté qu'il y a avait 3 polynômes scindés je ne me suis pas rendu compte qu'il n'en restait qu'un seul d'irréductible…

— *Savez-vous décrire les p-Sylow de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ *?* Ça ne me disait pas grand-chose, mais après avoir calculé $v_p(|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)|) = p^{n(n-1)/2}$, j'ai dit que ça évoquait des matrices antisymétriques ou triangulaires. L'examinateur m'a dit de partir sur cette dernière idée, et en fait à partir de là c'est facile. Après l'épreuve je me suis rappelé que c'était dans la preuve du premier théorème de Sylow dans le Perrin (qui vient apparemment de J.-P. Serre).

— *Exemple d'application du critère d'Eisenstein ?* L'irréductibilité du p-ième polynôme cyclotomique, en regardant $\Phi_p(X+1)$, a semblé plaire au jury. Sans doute aurait-il été préférable d'inclure l'exemple dans le plan…

— *Connaissez-vous d'autres preuves de la réciprocité quadratique ?* J'ai cité les mots-clés « somme de Gauss » et « équivalent asymptotique de la fonction thêta » (*cf. annexe*). « Donc il en existe beaucoup, des démonstrations différentes de la réciprocité quadratique ? — Oui, il y en a plein ! — Et comment est-ce que ça s'inscrit dans la théorie du corps des classes ? — Désolé, je ne connais pas grand-chose en théorie algébrique des nombres… ». Puis un autre membre du jury, amusé : « Je crois que ce n'est pas au programme de l'agrég, ça ! »

— La question pour finir : *Pouvez-vous décrire tous les morphismes de* $\mathrm{PSL}_4(\mathbb{F}_2)$ *dans* $\mathfrak{S}_3$ *?* J'ai séché pendant quelques secondes, puis l'examinateur me dit « Je n'ai pas choisi ce groupe par hasard, il est dans votre plan ! » et en effet une fois qu'on se souvient que c'est un groupe simple, la question devient, justement, simple.

Dernière remarque : le partage du temps de parole était très inégal, l'un des membres du jury a posé la grande majorité des questions pendant qu'une autre ne disait quasiment rien (peut-être était-ce une analyste ?).

Note 19/20.

Annexe : réciprocité des sommes de Gauss et fonction thêta

Ceci est une tentative inaboutie de fabriquer un développement original pour les leçons sur les séries et les développements asymptotiques. Elle m'aura donc malgré tout servi à répondre à une question du jury ! Il y a une arnaque dans la démonstration ci-dessous ; **avis aux amateurs : je suis à la recherche d'une solution satisfaisante**.

Référence livresque : Richard Bellman [1], *A brief introduction to theta functions*. Voir aussi l'article d'Anders Karlsson, *Applications of heat kernels on abelian groups : $\zeta(2n)$, quadratic reciprocity, Bessel integrals*, qui raconte également d'autres applications fort jolies. Cependant, aucun des deux ne fournit de preuve rigoureuse complète.

Dans tout ce qui suit, on fixe $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. La *somme de Gauss* associée est :

$$S(p,q) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \exp(-i\pi k^2 p/q)$$

Rappelons aussi que la *fonction θ de Jacobi* est définie sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$ par

$$\theta : z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}$$

et vérifie la formule d'inversion (avec le prolongement analytique de $\sqrt{\cdot}$ à $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$)

$$\theta(1/z) = \sqrt{z}\theta(z)$$

(preuve : via formule de Poisson, fait dans le TD d'analyse de Fourier…).

On va montrer le résultat suivant, à partir duquel la loi de réciprocité quadratique se déduit :

Théorème (Réciprocité des sommes de Gauss). *$\sqrt{p}S(p,q) = e^{-i\pi/4}\sqrt{q}\overline{S(q,p)}$, i.e.*

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{k \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} \exp\left(\frac{-i\pi k^2 p}{q}\right) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{p}} \sum_{k \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \exp\left(\frac{i\pi k^2 q}{p}\right)$$

Cette identité exacte peut en fait être obtenue à partir du développement asymptotique de $\theta(x + ip/q)$ pour $x \to 0^+$.

Lemme. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quand $x \to 0^+$, $\displaystyle\sum_{l=0}^{+\infty} \exp(-\pi(k+lq)^2 x) \sim \frac{1}{2q\sqrt{x}}$.*

Démonstration. La fonction $f : t \mapsto \exp(-\pi(k+tq)^2 x)$ est décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{l \geq 1} f(l) \leq \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leq \sum_{l \geq 0} f(l) \quad \text{soit} \quad 0 \leq \sum_{l \geq 0} f(l) - \int_0^{+\infty} f(t)\,dt \leq f(0) = e^{-\pi k^2 x} \leq 1$$

Calculons l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\pi(k+tq)^2 x)\,dt = \frac{1}{q\sqrt{\pi x}} \int_{k\sqrt{\pi x}}^{+\infty} e^{-u^2}\,du \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{1}{2q\sqrt{x}} \qquad (u = \sqrt{\pi x}(k+tq))$$

$\square$

1. Un analyste qui a aussi eu une carrière fructueuse de mathématicien appliqué : il est l'inventeur de la *programmation dynamique*, qui est au programme de l'agrég option D en algorithmique, mais intervient aussi en recherche opérationnelle et théorie du contrôle.

Proposition. *Quand* $x \to 0^+$, $\theta\left(x + i\dfrac{p}{q}\right) \sim \dfrac{S(p,q)}{q\sqrt{x}}$.

Démonstration. Par une interversion de sommes, justifiée par la sommabilité de la famille considérée, on obtient facilement que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \exp\left(-\pi n^2\left(x + i\frac{p}{q}\right)\right) = \sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{l\in\mathbb{N}} \exp(-\pi(k+lq)^2 x)\right)\exp\left(\frac{-i\pi k^2 p}{q}\right)$$

Grâce au lemme, on sait que les sommes intérieures sont équivalentes à $1/2q\sqrt{x}$, donc

$$\theta\left(x + i\frac{p}{q}\right) = 1 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \exp\left(-\pi n^2\left(x + i\frac{p}{q}\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{S(p,q)}{q\sqrt{x}}$$

□

Maintenant, écrivons l'équation fonctionnelle de θ :

$$\theta\left(\frac{1}{x + ip/q}\right) = \sqrt{x + i\frac{p}{q}} \times \theta\left(x + i\frac{p}{q}\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} e^{i\pi/4}\sqrt{\frac{p}{q}} \times \frac{S(p,q)}{q\sqrt{x}}$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{x - ip/q} \underset{x\to 0^+}{=} x\frac{q^2}{p^2} + i\frac{q}{p} + O(x^2)$$

Arnaquons maintenant allègrement en considérant que notre équivalent asymptotique, valable quand $z \to ip/q$ en suivant une demi-droite parallèle à $\mathbb{R}_+$, le reste en suivant un courbe qui finit par être tangente à cette demi-droite. Alors

$$\theta\left(\frac{1}{x + ip/q}\right) = \overline{\theta\left(\frac{1}{x - ip/q}\right)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\overline{S(q,p)}}{p\sqrt{xq^2/p^2}}$$

On voit donc apparaître du $S(q,p)$! En simplifiant et en comparant nos deux équivalents asymptotiques, on obtient l'identité arithmétique désirée.

Pour que ça marche vraiment, il faudrait étendre le cadre de validité du lemme, en faisant une comparaison série-intégrale plus subtile, peut-être en utilisant une formule du genre

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \int_0^{+\infty} (t - \lfloor t \rfloor) f'(t)\,dt$$

On pourrait dire qu'en fin de compte, on obtient la loi de réciprocité quadratique par une comparaison série-intégrale !